ШУТИС

ШИНЖЛЭХ УХААН ТЕХНОЛОГИЙН ИХ СУРГУУЛЬ

ХЭРЭГЛЭЭНИЙ ШИНЖЛЭХ УХААНЫ СУРГУУЛЬ

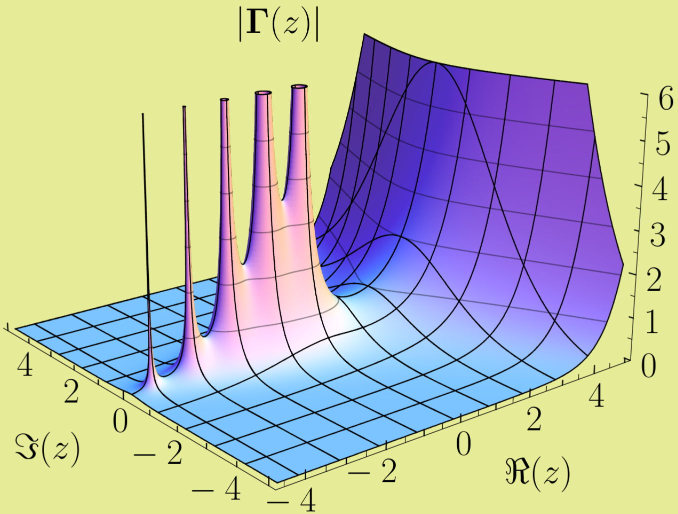
U.MT101-МАТЕМАТИК I ХИЧЭЭЛИЙН ЛЕКЦИЙН ХУРААНГУЙ

2015 он

ШУТИС
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

1. Лекц I

КОМПЛЕКС ТОО, ТҮҮН ДЭЭР ХИЙХ ҮЙЛДЛҮҮД



Тодорхойлолт 1.1 x ба y бодит тоонууд бол эрэмбэлэгдсэн (x, y) хосыг **комплекс тоо** гэх ба түүнийг z-ээр тэмдэглэвэл x ба y тоонуудыг харгалзан z комплекс тооны **бодит** ба **хуурмаг** хэсгүүд гээд Rez,Imz гэж тэмдэглэдэг.

$$x = Rez, \quad y = Imz$$

$z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ комплекс тоонуудыг **нэмэх, хасах, үржүүлэх** үйлдлүүдийг

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, \; y_1 \pm y_2) \tag{1.1}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, \;\; x_1 y_2 + y_1 x_2) \tag{1.2}$$

$z_2 \neq 0$ үед **хуваах үйлдлийг**

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \;\; \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) \tag{1.3}$$

гэж тодорхойлно.

Эдгээр үйлдлүүдийн хувьд

1. Байр солих: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$
2. Бүлэглэх: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
   $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
3. Хаалт нээх: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

гэсэн хуулиуд биелнэ.
x бодит тоог хуурмаг хэсэг нь тэгтэй тэнцүү $(x,\ 0)$ гэсэн комплекс тоо гэж үзнэ.

$$x = (x,\ 0)$$

Бодит хэсэг нь тэгтэй тэнцүү $(0,\ 1)$ гэсэн тоог **хуурмаг нэгж** гэж нэрлэн i-ээр тэмдэглэдэг.

$$i = (0,\ 1)$$

(1.2) ёсоор $i^2 = -1$ байна.
(1.1) – (1.3) тодорхойлтыг ашиглан $z = (x, y)$ комплекс тоог

$$z = x + iy \tag{1.4}$$

хэлбэртэй бичиж болно.

Комплекс тоо бүрийг (1.4) хэлбэртэй гэж үзэх ба тэдгээр дээр хийх үйлдлийг $1-3$ хуулиудыг ашиглан хялбар гүйцэтгэж болно.
$\overline{z}=x-iy$ тоог $z=x+iy$ тооны **хосмог тоо** гэнэ.

$\overline{(\overline{z})}=z,\quad \overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2},\quad \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2},\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};$

чанарууд хүчинтэй. Ноогдворыг олоход хүртвэр, хуваарийг нь хуваарийн хосмог тоогоор үржүүлэх нь ашигтай байдаг. $z=x+iy$ комплекс тоог O_{xy} хавтгай дээр $M(x,y)$ цэгээр эсвэл $\overrightarrow{OM}$ вектороор дүрслэнэ. Энэ үед $\overrightarrow{OM}$ векторын модулийг z **тооны модуль** гээд $|z|$-ээр, $\overrightarrow{OM}$ векторын абсцисс тэнхлэгтэй үүсгэсэн φ өнцгийг z **тооны аргумент** гээд $\arg z$ гэж тус тус тэмдэглэнэ.

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arg z$$

Комплекс тооны аргумент нь нэг утгатай биш бөгөөд φ аргументтай тооны хувьд
$\varphi + 2\pi\kappa, \quad \kappa \in Z$ нь мөн тооны аргумент болно.
$z = x + iy$ комплекс тоог модуль ба аргументаар нь

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.5}$$

хэлбэрт бичиж болох ба үүнийг комплекс тооны **тригонометрийн хэлбэр** гэнэ.
Дараах томъёонууд хүчинтэй.

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{1.6}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{1.7}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{1.8}$$

Дурын натурал n-ын хувьд:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{1.9}$$

үүнд $\varphi = \arg z$; тухайн тохиолдолд $|z| = 1$ бол (1.9) нь

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

гэсэн Муаврын томъёо болно.
n натурал тооны хувьд:

$$\omega^n = z \qquad (z \neq 0)$$

бол ω-г z тооны n **зэргийн язгуур** гэнэ. z $(z \neq 0)$ тооноос n ялгаатай n зэргийн язгуур гарах ба тэдгээрийг

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}) \quad (k = 0,\ 1,\ \cdots\ ,\ n-1$$

$$\varphi = \arg z \tag{1.10}$$

томъёогоор олж болно.

ШУТИС
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

2. Лекц II

МАТРИЦ, ТҮҮН ДЭЭР ХИЙХ ҮЙЛДЛҮҮД

$m \times n$ хэмжээст матриц

i өөрчлөгдөнө.

j өөрчлөгдөнө

$$\begin{array}{cc} a_{ij} & n \text{ багана} \\ m \text{ мөр} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Тодорхойлолт 2.1 m мөр n багана бүхий таблиц хэлбэрээр байрлуулагдсан $m \cdot n$ тоог $m \times n$ **хэмжээст матриц** гээд $A_{m\times n}$ гэж тэмдэглэдэг.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицад бичсэн тоонуудыг **матрицын элемент** гэнэ. Матрицын i-р мөр j-р баганад байрлах элементийг a_{ij} гэж тэмдэглэдэг.

Тодорхойлолт 2.2 Хэрэв $m \neq n$ бол тэгш өнцөгт матриц, харин $m = n$ бол **квадрат матриц** буюу **n эрэмбийн матриц** гэнэ.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадрат матрицад $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ элементүүд гол диагональ үүсгэнэ.

Тодорхойлолт 2.3 A квадрат матрицын хувьд $i \neq j$ байхад $a_{ij} = 0$ байвал матрицыг **диагональ матриц** гэнэ.

Тодорхойлолт 2.4 $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = d$ байх диагональ матрицыг **скаляр матриц** гэнэ.

Тодорхойлолт 2.5 $d = 1$ байх скаляр матрицыг **нэгж матриц** гээд -ээр тэмдэглэдэг.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Тодорхойлолт 2.6 Хэрэв квадрат матрицын гол диагоналийн дээд (доод) талд байрлах бүх элементүүд тэг бол **доод (дээд) гурвалжин матриц** гэнэ.

$m \times 1$ хэмжээстэй матрицыг **баганан матриц**, харин $1 \times n$ хэмжээст матрицыг **мөрөн матриц** гэдэг.$m \times n$ хэмжээст A ба B матрицын i, j бүрийн хувьд $a_{ij} = b_{ij}$ байвал тэнцүү матрицууд гэнэ.

Тодорхойлолт 2.7 Бүх элементүүд нь тэгтэй тэнцүү матрицыг **тэг матриц** гээд -ээр тэмдэглэдэг.

Жишээлбэл: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тодорхойлолт 2.8 Дараах матрицыг **трапец хэлбэрийн матриц** гэнэ.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Үүнд $a_{ii} \neq 0, (i = \overline{1, r})$ байна.

Матриц дээрх үйлдлүүд

1. Матрицуудыг нэмэх: Хэрэв ба B нь $m \times n$ хэмжээст матриц бол $\mathbf{A+B}$ нь

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$$

элементүүдтэй C матриц байна.

2. Матрицыг тоогоор үржүүлэх:

Хэрэв λ бодит тоо бол **А матрицыг λ-аар үржүүлсэн үржвэр**

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ . & . & . & \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

байна.

Дээр тодорхойлсон хоёр үйлдлийн хувьд дараах чанарууд хүчинтэй.

Хэрэв $, B, C$ нь $m \times n$ хэмжээст матрицууд, λ_1, λ_2 бодит тоонууд бол:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot A = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot A)$
4. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
5. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A = \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot A$

3. Матрицуудыг үржүүлэх: A нь m мөртэй k баганатай , B нь k мөртэй n баганатай матриц байг.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj} \quad (i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$$

элементүүдтэй байх C матрицыг $A\cdot B$ **үржвэр матриц** гэнэ.

Тодорхойлолт 2.9 Хэрэв $A\cdot B = B\cdot A$ байвал A , B матрицуудыг **сэлгэх (коммутатив) матрицууд** гэнэ.

Матрицуудыг үржүүлэх үйлдлийн хувьд дараах чанарууд хүчинтэй.
1. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
2. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
3. $A\cdot E=E\cdot A=A$
4. $(\lambda\cdot A)\cdot B=\lambda\cdot(A\cdot B)$. Энд λ- бодит тоо

ШУТИС
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

Матрицуудыг үржүүлэх

B : p мөр q багана

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

$$a_{i1} \times b_{1j} + \dots + a_{ik} \times b_{kj} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} & \dots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

A : n мөр p багана

$C = A \times B$: n мөр q багана

Нүүр хуудас

4. Матрицыг хөрвүүлэх: $A_{m\times n}$ матрицыг хөрвүүлсэн матриц $A_{n\times m}$ хэмжээст A^T матриц байна.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ . & . & . & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

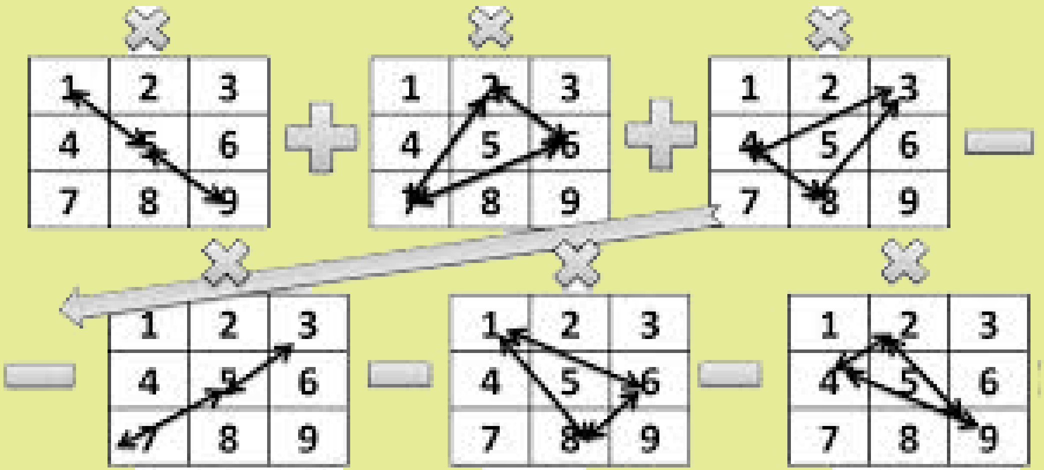
Матрицыг хөрвүүлэх үйлдлийн хувьд дараах чанарууд хүчинтэй.

1. $(A)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ λ- бодит тоо

Хэрэв квадрат матриц A-ийн хувьд $A = A^T$байвал тэгшхэмтэй матриц гэнэ.

3. Лекц III

ТОДОРХОЙЛОГЧ ТҮҮНИЙ ЧАНАРУУД, ТОДОРХОЙЛОГЧ БОДОХ АРГА



Тодорхойлолт 3.1 A квадрат матрицад тодорхой дүрмээр тоог харгалзуулж, түүнийг уг **матрицын тодорхойлогч** гээд $detA$ гэж тэмдэглэдэг.

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n \times n$ хэмжээст тодорхойлогчийг **n эрэмбийн тодорхойлогч** гэнэ.
Хоёрдугаар эрэмбийн тодорхойлогчийг

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

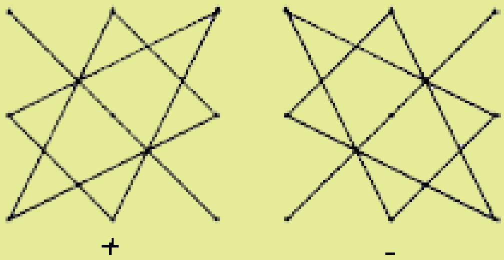
томьёогоор бодно.

Гуравдугаар эрэмбийн тодорхойлогчийг дараах Саррюсийн (гурвалжны) дүрмээр бодох нь хялбар байдаг.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Энэ дүрмийг схемээр харуулъя.



A, B квадрат матрицуудын хувьд

1. $det(AB) = detA \cdot detB$
2. $det(A)^T = detA$ байна.

Минор ба алгебрийн гүйцээлт

Тодорхойлолт 3.2 n-р эрэмбийн тодорхойлогчийн i -р мөр j -р баганыг хасахад гарах $(n-1)$-р эрэмбийн тодорхойлогчийг a_{ij} элементэд харгалзах **минор** гээд M_{ij} гэж тэмдэглэнэ.
$(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ -ийг a_{ij} элементэд харгалзах **алгебрийн гүйцээлт** гээд A_{ij} гэж тэмдэглэдэг.

Квадрат матрицын тодорхойлогч нь түүний аль нэг мөрийн (баганы) элемент бүрийг харгалзах алгебрийн гүйцээлтээр нь үржүүлсэн үржвэрүүдийг нэмсэн нийлбэртэй тэнцүү.

ШУТИС
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

Тодорхойлогчийн чанарууд

1. Хэрэв квадрат матрицын дурын хоёр мөр (багана) ижил байвал тодорхойлогч тэгтэй тэнцүү байна.

2. Хэрэв квадрат матрицын аль нэг мөрийн (баганын) бүх элементүүд тэгтэй тэнцүү бол тодорхойлогч нь тэг байна.

3. Хэрэв B матриц A квадрат матрицын дурын хоёр мөрийн (баганын) байрыг солиход гарсан матриц бол тодорхойлогч нь $detB = -detA$ байна.

4. Хэрэв B матриц A квадрат матрицын ямар нэг мөрийн (баганын) бүх элементүүдийг тэгээс ялгаатай k тоогоор үржүүлэхэд гарсан матриц бол тодорхойлогч нь $detB = \cdot detA$ байна.

5. Квадрат матрицын аль нэг мөрийн (баганын) элементүүдийг тэгээс ялгаатай тоогоор үржүүлж нөгөө мөрийн (баганын) харгалзах элементүүд дээр нэмэхэд тодорхойлогч өөрчлөгдөхгүй.

6. Хэрэв квадрат матрицын хоёр мөрийн (баганын) бүх элементүүд пропорциональ бол тодорхойлогч нь тэг байна.

7. Квадрат матрицын аль нэг мөрийн (баганын) элементүүдийг өөр мөрийн (баганын) харгалзах элементүүдийн алгебрийн гүйцээлтүүдээр үржүүлж нэмэхэд тэг байна.

Мөн гурвалжин хэлбэртэй матрицын тодорхойлогч нь гол диагоналийн элементүүдийн үржвэртэй тэнцүү . Харин квадрат матрицын хувьд хажуу диагоналийн аль нэг талын элементүүд бүгд тэг бол тодорхойлогч нь хажуу диагональ дээрх тоонуудын үржвэрийг $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$-оор үржүүлсэнтэй тэнцүү байдаг.

4. Лекц IV

УРВУУ МАТРИЦ, МАТРИЦАН ТЭГШИТГЭЛ, МАТРИЦЫН РАНГ

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

ШУТИС
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

Тодорхойлолт 4.1 n эрэмбийн квадрат матриц A-ийн хувьд $A{\cdot}A^{-1} = A^{-1}{\cdot}A = E$ тэнцэтгэл биелэгдэж байвал A^{-1} -г A-ийн **урвуу матриц** гэнэ.
Үл бөхөх буюу $\triangle = detA \neq 0$ байх матриц бүр урвуутай бөгөөд

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\triangle} & \frac{A_{21}}{\triangle} & \dots & \frac{A_{n1}}{\triangle} \\ \frac{A_{12}}{\triangle} & \frac{A_{22}}{\triangle} & \dots & \frac{A_{n2}}{\triangle} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\triangle} & \frac{A_{2n}}{\triangle} & \dots & \frac{A_{nn}}{\triangle} \end{pmatrix}$$

гэж олдог.
Үүнд A_{ij} нь A матрицын a_{ij} элементийн алгебрийн гүйцээлт болно.$(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n})$

Урвуу матрицын аргаар системийг бодох

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ddots \\ b_m \end{pmatrix}$$

матрицуудаар зохиогдсон

$$A \cdot X = B$$

гэсэн матрицан тэгшитгэлийг урвуу матриц ашиглан бодож болно.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Матрицын ранг

Тодорхойлолт 4.2 Матрицын тэгээс ялгаатай минорuудын хамгийн их эрэмбийг матрицын ранг гэж нэрлээд $r(A) = k$ гэж тэмдэглэнэ.

$$0 \leq r(A) \leq min\{m, n\}$$

Эрэмбэ нь матрицын рангийг тодорхойлж байгаа минорыг суурь минор гэнэ.
Элементар хувиргалт хийх замаар суурь минор нь ил харагдаж буй матриц байгуулж анхны матрицын рангийг олдог.

5. Лекц V

ШУГАМАН ТЭГШИТГЭЛИЙН СИСТЕМ

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Тодорхойлолт 5.1

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right. \tag{5.1}$$

системийг n *хувьсагчтай* m **шугаман тэгшитгэлийн систем** *гэнэ.*

Үүнд a_{ij}, b_i -үүд бодит тоонууд бөгөөд a_{ij}-үүдийг системийн коэффициентууд , b_i -г сул гишүүд гэнэ.

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{үндсэн матриц}}, \quad \underbrace{\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)}_{\text{өргөтгөсөн матриц}}$$

Нүүр хуудас

Тодорхойлолт 5.2 $x_1, x_2, ...x_n$ *гэсэн тодорхой эрэмбэлэгдсэн* n *тоонуудыг* (5.1)-*д орлуулахад тэгшитгэл бүрийг адилтгал болгож байвал эдгээрийг* **системийн шийд** *гэнэ.*

Тодорхойлолт 5.3 *Хэрэв* (5.1) *ядаж нэг шийдтэй бол* **нийцтэй**, *шийдгүй бол* **нийцгүй** *систем гэнэ. Нийцтэй систем цор ганц шийдтэй бол тодорхой, төгсгөлгүй олон шийдтэй бол тодорхойгүй гэнэ.*

Теорем 5.1 *(5.1) систем нийцтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь системийн үндсэн ба өргөтгөсөн матрицын рангууд тэнцүү байх явдал юм.*

$$r(A) = r(\widetilde{A}).$$

Тодорхойлолт 5.4 *Ижил хувьсагчтай тэгшитгэлүүдийн хоёр системийн шийдүүд давхцаж байвал тэдгээрийг эквивалент системүүд гэнэ.*

Өгөгдсөн шугаман тэгшитэлийн системийг

- Аль нэг тэгшитгэлийг тэгээс ялгаатай тогтмол тоогоор үржүүлэх
- Тэгшитгэлүүдийн байрыг солих
- Нэг тэгшитгэлийг тоогоор үржүүлж нөгөө тэгшитгэл дээр нэмэх

хувиргалтуудаар түүнтэй эквивалент системд шилжүүлэн бодож болно.

$\tilde{A}$ матриц дээр хялбар хувиргалт хийсний дараа

а)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & b'_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right), \quad r \le n, \ a'_{rr} \ne 0$$

хэлбэртэй болж $r(A) = r(\overline{A})$ бол уг систем цор ганц шийдтэй байна. r-р тэгшитгэлээс x_r -ийг, $r-1$ дүгээр тэгшитгэлээс x_{r-1} -ийг, гэх мэтчилэн $x_1, \dots, x_r$ шийдийг олно. Энэ хэлбэрийг гурвалжин хэлбэр гэдэг.

b)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

хэлбэртэй болсон бол систем төгсгөлгүй олон шийдтэй байна. $n-r$ тооны хувьсагч нь чөлөөт хувьсагч болох ба, бусад нь эдгээр хувьсагчид болон b'_r сул гишүүний шугаман эвлүүлгээр бичигдэнэ. (Трапец хэлбэр гэнэ.)

c)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right), \ r \leq n, \ b'_r \neq 0$$

хэлбэртэй бол уг систем нийцгүй систем байна.

6. Лекц VI

НЭГЭН ТӨРЛИЙН ШУГАМАН ТЭГШИТГЭЛИЙН СИСТЕМ, МАТРИЦЫН ХУВИЙН УТГА, ХУВИЙН ВЕКТОР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Крамерийн дүрэм

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad (6.1)$$

$det(A) \neq 0$ үед (6.1) систем шийдтэй байх ба шийдүүд нь дараах томъёогоор олдоно.

$$x_k = \frac{b_1A_{1k} + \ldots + b_nA_{nk}}{a_{1k}A_{1k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}} = \frac{\triangle_k}{\triangle}. \quad k = \overline{1, n} \quad (6.2)$$

Үүнд: $\triangle_k$ нь тодорхойлогчийн k дугаар баганын элементүүдийг, сул гишүүний баганаар солиход үүсэх тодорхойлогч. (6.2) томъёог **Крамерийн томъёо** гэнэ.

Тодорхойлолт 6.1

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (6.3)$$

-г нэгэн төрлийн шугаман тэгшитгэлийн систем(НТШТС) гэнэ.

НТШСТ нь $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots, x_n = 0$ гэсэн илэрхий шийдтэй учир ямагт нийцтэй систем байна.

Теорем 6.1 *НТШТС тэгээс ялгаатай шийдтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь үндсэн матрицын ранг нь хувьсагчийн тооноос бага байх явдал юм.*

$$r(A) < n$$

Матрицын хувийн утга, хувийн вектор

Тодорхойлолт 6.2 *Хэрэв* $AX = \lambda X$ *нөхцөл биелэж байвал* X *векторыг* A *матрицын* **хувийн вектор,** λ*-г* A *матрицын* **хувийн утга** *гэнэ.*

Жишээ

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{3}_{\lambda} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X} \quad \text{тул}$$

$X = \{2, -2, 1\}^T$ вектор нь өгөгдсөн A матрицын $\lambda = 3$ хувийн утганд харгалзах хувийн вектор болно.

$AX = \lambda X$ нөхцөлийг $(A - \lambda)X = 0$ буюу дараах хэлбэртэй бичье.

$$(A - \lambda E)X = 0$$

Координатаар бичвэл:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

хэлбэрийн НТШТС болно.

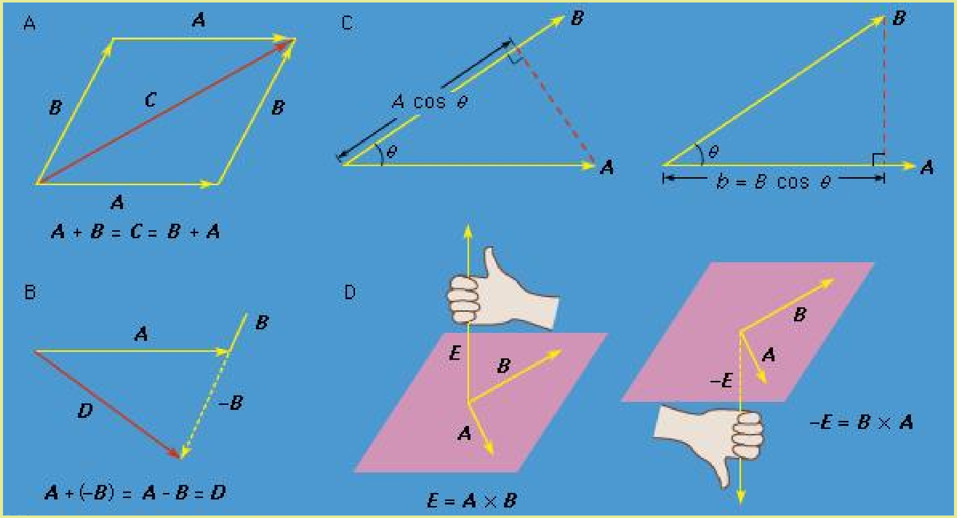
A матрицын хувийн утга λ нь

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

гэсэн характеристик тэгшитгэлийн бодит шийд байна. Характеристик тэгшитгэлийн шийд болох матрицын хувийн утгыг олж (6.4) системд орлуулан харгалзах хувийн векторын координатыг олно.

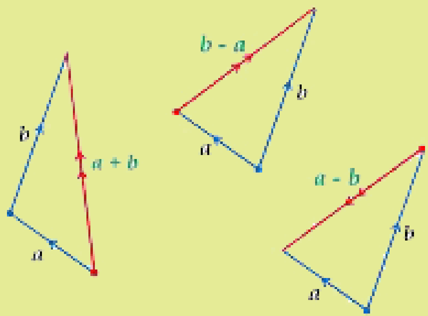
7. Лекц VII

ВЕКТОР, ТҮҮН ДЭЭРХ ҮЙЛДЭЛ, ШУГАМАН ХАМААРАЛ, СУУРЬ ВЕКТОР



Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

Тодорхойлолт 7.1 Чиглэлт хэрчмийг **вектор** гэнэ. Хэрэв A эхлэл, B төгсгөл бол векторыг $\overrightarrow{AB}$ гэж тэмдэглэдэг. Векторын уртыг түүний **модуль** гэж нэрлэх бөгөөд $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{a}|$ гэх мэт тэмдэглэнэ. Векторуудыг нэмэх, хасах, тоогоор үржүүлэх үйлдлүүдийг вектор дээрх шугаман үйлдэл гэж нэрлэнэ. Дурын $\overrightarrow{a}$ ба $\overrightarrow{b}$ хоёр вектор аваад тэдгээрийг **нэмэх** ба **хасах** үйлдлийг дараах зургаар үзүүлье.



Зураг 7.1

Векторыг тоогоор үржүүлэхдээ дараах дүрмийг баримтлана. a- дурын вектор, $\forall\lambda \in R$ бодит тоо байг. $\overrightarrow{c} = \lambda\overrightarrow{a}$ векторыг

1. $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{\lambda}||\overrightarrow{a}|$,
2. Хэрэв $\lambda > 0$ бол $\overrightarrow{a}$-тай ижил чиглэлтэй, $\lambda < 0$ бол $\overrightarrow{a}$-тай эсрэг чиглэлтэй байхаар тодорхойлдог.

Вектор дээр хийх шугаман үйлдлүүдийн хувьд дараах чанарууд хүчинтэй байна.

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$
2. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$
3. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$
4. $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{-a}) = \overrightarrow{0}$
5. $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}, \ \lambda \in R$
6. $(\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{a} = \lambda_1\overrightarrow{a} + \lambda_2\overrightarrow{a}, \ \lambda_1, \lambda_2 \in R$
7. $\lambda_1(\lambda_2\overrightarrow{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\overrightarrow{a}$
8. $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

Хавтгай дээрх дурын гурван, огторгуй дах дурын дөрвөн вектор шугаман хамааралтай байна.

Нуур хуудас

Тодорхойлолт 7.2 Хавтгай дээрх шугаман хамааралгүй дурын хоёр векторыг **хавтгайн суурь вектор** гэж нэрлэх бөгөөд сууриар задлан бичвэл

$$\overrightarrow{a} = \lambda_1 \overrightarrow{e}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{e}_2$$

болно. Үүнд: λ_1, λ_2 тоог $\overrightarrow{a}$ векторын **аффин координат** гэнэ.

Тодорхойлолт 7.3 Огторгуй дах шугаман хамааралгүй дурын гурван векторыг **огторгуйн суурь вектор** гэж нэрлэх ба сууриар нь задлаж бичвэл $\overrightarrow{a} = \lambda_1 \overrightarrow{e}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{e}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{e}_3$ болно. Үүнд: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ тоог $\overrightarrow{a}$ векторын **аффин координат** гэнэ.

Векторын тэнхлэг дээрх проекцыг

$$\text{пр}_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$$

томьёогоор тодорхойлно. Энд φ нь $\overrightarrow{e}$ тэнхлэг $\overrightarrow{AB}$ векторын хоорондох өнцөг.

Проекцын хувьд дараах чанарууд хүчинтэй.

$$\text{пр}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}) = \text{пр}_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{a} + \text{пр}_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{b} \tag{7.1}$$

$$\text{пр}_{\overrightarrow{e}}\lambda\overrightarrow{a} = \lambda\cdot\text{пр}_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{a}, \quad \forall\lambda\in R \tag{7.2}$$

$\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ нь координатын Ox, Oy, Oz тэнхлэгүүдтэй харгалзан ижил чиглэлтэй, нэгж урттай векторууд байг. Дурын $\overrightarrow{a}$ векторыг координатын сууриар задлан бичвэл

$$\overrightarrow{a} = x\cdot\overrightarrow{i} + y\cdot\overrightarrow{j} + z\cdot\overrightarrow{k}$$

болно.

x, y, z коэффициентүүдийг $\overrightarrow{a}$ векторын $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ суурь дахь координат гэх ба эдгээр нь координатын тэнхлэгүүд дээрх проекцууд юм. Тэдгээрийг $\overrightarrow{a}$ векторын **тэгш өнцөгт координатууд** гэнэ.

Нүүр хуудас

Тодорхойлолт 7.4 $\overrightarrow{a}$ вектор x, y, z координаттай гэвэл $\overrightarrow{a} = (x, y, z)$ гэж бичнэ. $\overrightarrow{a}$ векторын хувьд урт нь нэгтэй тэнцүү, $\overrightarrow{a}$ -тай ижил чиглэлтэй векторыг $\overrightarrow{a}$ **векторын нэгж вектор** буюу **орт** гээд $\overrightarrow{a}^0$ гэж тэмдэглэнэ. Орт векторын хувьд

$$\overrightarrow{a}^0 = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$$

томъёо хүчинтэй.
$\overrightarrow{a}$ вектор нь координатын тэнхлэгүүд Ox, Oy, Oz -тэй харгалзан α, β, γ өнцөг үүсгэдэг бол чиглүүлэгч косинусуудыг олох томъёо нь

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{a}|}; \qquad \cos\beta = \frac{y}{|\overrightarrow{a}|}; \qquad \cos\gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{a}|}$$

болно.
Координатаараа өгөгдсөн векторууд дээрх шугаман үйлдлүүд нь тэдгээрийн координат дээрх үйлдлүүдэд шилжинэ.
$\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ба $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in R^3$ өгөгдсөн байг.

1. $\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$
2. $\lambda \cdot \overrightarrow{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$
3. $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$ байвал $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ байна.
4. $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$
5. $A = (x_1, y_1, z_1)$ ба $B(x_2, y_2, z_2)$ цэгүүд координатаараа өгөгдсөн байг. Тэгвэл

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

болно.
6. Хоёр цэгийн хоорондох зайг

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

томъёогоор тодорхойлно.

8. Хэрчмийг өгөгдсөн λ харьцаанд хуваах цэгийн координатыг олох томъёо нь

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

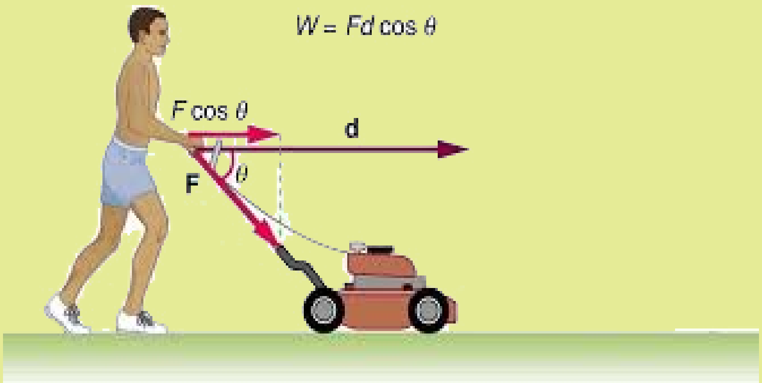
Хэрчмийг таллан хуваах цэгийн координатыг олох томъёо нь

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

болно. $(\lambda = 1)$

8. Лекц VIII

ВЕКТОРУУДЫН СКАЛЯР, ВЕКТОР, ХОЛИМОГ ҮРЖВЭР

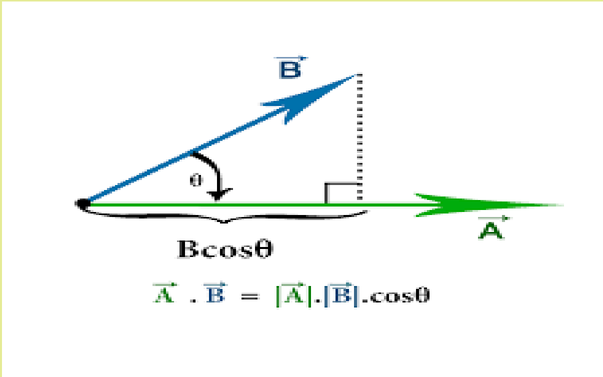


Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

Тодорхойлолт 8.1 $\overrightarrow{a}$ ба $\overrightarrow{b}$ хоёр векторын хувьд

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$$

томъёогоор тодорхойлогдох тоог тэдгээрийн **скаляр үржвэр** гэнэ.



$\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ба $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2, z_2)$ гэсэн координатаараа өгөгдсөн бол

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

болно.

ШУТИС
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

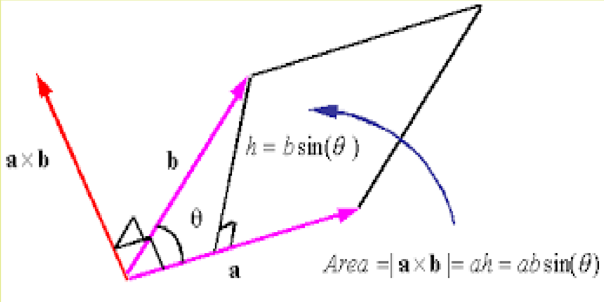
Скаляр үржвэр дараах чанаруудтай байна.

1. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$
2. $\overrightarrow{a} \cdot (\lambda \overrightarrow{b}) = (\lambda \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$
3. $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$
4. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \geq 0$
5. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$
6. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \text{пр}_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}| \cdot \text{пр}_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a}$ **Тодорхойлолт**

8.2 R^3 дах $\overrightarrow{a}$ ба $\overrightarrow{b}$ векторын хувьд

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi)\overrightarrow{n}$$

томъёогоор тодорхойлогдох векторыг тэдгээрийн **вектор үржвэр** гэнэ.



Үүнд: $\varphi = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ ба $\overrightarrow{n}$ нь $\overrightarrow{a}$ ба $\overrightarrow{b}$ векторуудын хавтгайд перпендикуляр нэгж вектор бөгөөд $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{n})$ нь баруун гуравт байх дүрмээр тодорхойлогдсон чиглэлтэй. Вектор үржвэр нь дараах чанаруудтай.

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a})$
2. $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c})$
3. $(k\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times (k\overrightarrow{b}) = k(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$

ШУТИС
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ба $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторууд координатаараа өгөгдвөл вектор үржвэр нь

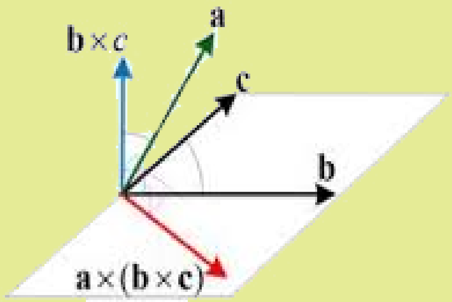
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

болно.

Тодорхойлолт 8.3

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ гурван вектороос зохиосон $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ үржвэрийг **холимог үржвэр** гэнэ.



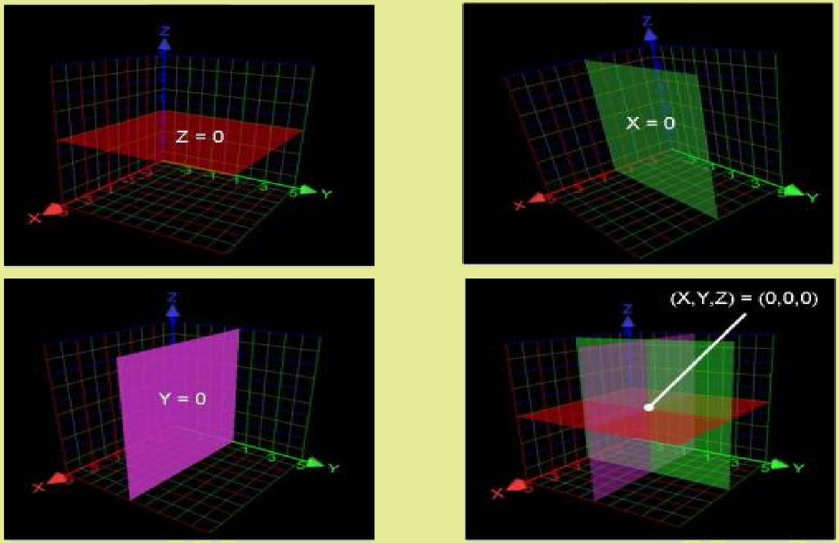
$\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, z_1)$; $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2, z_2)$; $\overrightarrow{c} = (x_3, y_3, z_3)$ векторуудын холимог үржвэрийг

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

томъёогоор олно.

9. Лекц IX

КООРДИНАТЫН СИСТЕМ. ХАВТГАЙ ДАХЬ ШУЛУУНЫ ТЭГШИТГЭЛҮҮД. ШУЛУУНУУДЫН ХАРИЛЦАН БАЙРШИЛ



ШУТИС

Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI

Нүүр хуудас

Хавтгайн аналитик геометрийн хялбар бодлогууд

1. $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ **хоёр цэгийн хоорондох зай**

$$D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2. A, B цэгийг холбосон **хэрчмийг** $AM:MB=\lambda$ **харьцаанд хуваах** $M(x;y)$ цэгийн координат нь

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{x+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Тухайн тохиолдолд $\lambda=1$ буюу AB хэрчмийг таллан хуваах $M(x;y)$ цэгийн координат нь

$$x=\frac{x_2+x_1}{2},\quad y=\frac{y_2+y_1}{2}.$$

3. $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ оройтой **гурвалжны талбай**

$$S=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|.$$

4. Тэгш өнцөгт (x, y) координат нь (ρ, φ) туйлын координаттай
$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$ ба $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\varphi = arctg\frac{y}{x}$$

томъёогоор холбогдоно.

5. Хавтгай дээрх шугам нь тэгш өнцөгт координатын системд $f(x, y) = 0$ тэгшитгэлээр, туйлын координатын системд $\Phi(\rho, \varphi) = 0$ тэгшитгэлээр дүрслэгдэхээс гадна $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ хэлбэрийн параметрт тэгшитгэлээр өгөгдөж болно.

6. XOY-координатын системийг $O'(a, b)$ цэг дээр **параллель зөөх хувиргалт**

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

Координатуудын тэнхлэгүүдийг **эргүүлэх хувиргалт**

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \quad \text{буюу} \quad \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Хавтгай дээрх шулуун

1. Ерөнхий тэгшитгэл нь: $Ax + By + C = 0$
2. Өнцгийн коэффициенттэй тэгшитгэл нь: $y = kx + b$
3. Хэрчим дэхь тэгшитгэл нь: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
4. Нормаль тэгшитгэл нь: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$
5. Өгөгдсөн $M_1(x_1; y_1)$ цэгийг өгөгдсөн чиглэлд дайрч гарах шулууны тэгшитгэл нь:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

6. Өгөгдсөн $M(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ **хоёр цэгийг дайрч** гарсан шулууны тэгшитгэл нь:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

7. $y=k_1x+b_1$ ба $y=k_2x+b_2$ хоёр шулууны хоорондох өнцгийг: $tg\alpha=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$

8. Хоёр шулууны **параллель** байх нөхцөл нь: $k_1=k_2$

9. Хоёр шулууны **перпендикуляр** байх нөхцөл нь: $k_1k_2=-1$

10. Өгөгдсөн $A(x_0;y_0)$ цэгийг дайруулан төгсгөлгүй олон шулуун татаж болох бөгөөд тэдгээрийг **шулуунуудын багц** гэнэ. Багцын тэгшитгэл нь: $y-y_0=k(x-x_0)$ байна. Үүнд k нь дурын тогтмол тоо.
Багцын төв болох цэг нь $A_1x+B_1y+C_1=0$ ба $A_2x+B_2y+C_2=0$ гэсэн хоёр шулууны огтлолцол гэж өгөгдвөл багцын тэгшитгэл нь: $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ байна.

11. $M(x_0; y_0)$ **цэгээс** $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ **шулуун хүрэх зайг:**

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|$$

Хэрэв шулуун $Ax + By + C = 0$ ерөнхий тэгшитгэлээр өгөгдсөн бол зайг

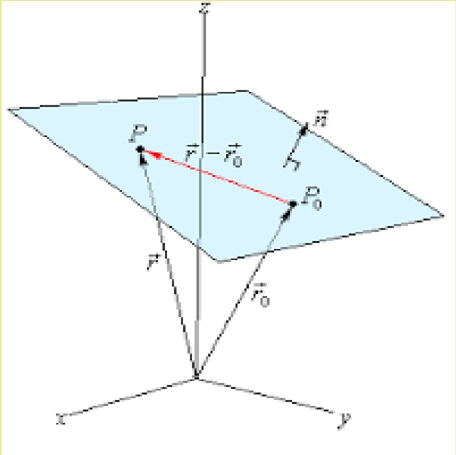
$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

томъёогоор олно.

12. Хоёр шулууны огтолцсон цэгийг тэгшитгэлийг системчлэн бодож болно.

10. Лекц X

ОГТОРГУЙ ДАХЬ ХАВТГАЙН ТЭГШИТГЭЛҮҮД. ТЭДГЭЭРИЙН ХАРИЛЦАН БАЙРШИЛ. ЦЭГЭЭС ХАВТГАЙ ХҮРТЛЭХ ЗАЙ.



Гадарга ба шугамын тэгшитгэл

Хавтгай дээр хоёр үл мэдэгдэхтэй $f(x,y) = 0$ тэгшитгэл нь ерөнхийдөө ямар нэг шугам тодорхойлдгийг дээр үзсэн.
Үүнтэй төсөөтэй огторгуйд

$$F(x,y,z) = 0 \tag{7.1}$$

тэгшитгэл ерөнхийдөө ямар нэг гадарга тодорхойлдог.
Тодорхойлолт 10.1 Гадаргуу дээр орших цэг бүрийн координат хангадаг, гадаргуугийн гадна орших аль ч цэгийн координат хангадаггүй тэгшитгэлийг **Гадаргын тэгшитгэл** гэнэ.
Иймээс гадаргуугийн тэгшитгэл өгөгдсөн бол огторгуйн ямар нэг цэгийг, тэр гадаргуу дээр орших эсэхийг тогтоож болно.
Үүний мөн чанар нь гадаргууг, түүний тэгшитгэлээр судлах бололцоо олгож байгаад оршино.

Огторгуйн аливаа шугамыг хоёр гадаргуугийн огтлолцол мэтээр тодорхойлж болно. Тухайлбал: $F(x,y,z) = 0, \Phi(x,y,z) = 0$ гадаргуунууд өгөгдсөн бол тэдгээрийн огтлолцлоор тодорхойлогдох L шугам гэдэг нь эдгээр гадаргуугийн аль алин дээр орших цэгүүдийн олонлог юм. Өөрөөр хэлбэл L шугамын цэг нь $F(x,y,z) = 0$ тэгшитгэлийг ч, $\Phi(x,y,z) = 0$ тэгшитгэлийг ч хангана.

Координатын аль нэг тэнхлэгт параллель байгуулагчтай цилиндр гадаргуугийн тэгшитгэл.

Эхлээд $F(x,y) = 0$ тэгшитгэлийг тусгайлан авч үзье. Энэ тэгшитгэлд z хувьсагч оролцоогүй байгаа учир түүнд дурын холбогдол өгч болно. Харин эхний хоёр координатын хувьд ийм боломжгүй. Дээрх тэгшитгэлээр Oz тэнхлэгтэй параллель байгуулагчтай цилиндр тодорхойлогдоно.

Энэчлэн $F(x,z) = 0$, $F(y,z) = 0$ тэгшитгэлүүдээр харгалзан Oy, Ox тэнхлэгтэй параллель байгуулагч бүхий цилиндр гадаргуу тодорхойлогдохыг тогтоож болно.

Алгебрын гадаргуунууд.
Огторгуйн аналитик геометрийн судлах гол зүйл нь декартын тэгш өнцөгт координатын системд алгебрын тэгшитгэлээр тодорхойлох гадаргуунууд юм.
Тэдгээрийн тэгшитгэл нь:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{10.2}$$

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L = 0 \tag{10.3}$$

хэлбэртэй байдаг. Үүнд $A, B, C, D, \ldots$ тоонуудыг коэффициент гэдэг бөгөөд тогтмол тоонууд байна.
Тодорхойлолт 10.2 (10.2) тэгшитгэлийг **нэгдүгээр зэргийн ерөнхий тэгшитгэл**, (10.3) тэгшитгэлийг **хоёрдугаар зэргийн ерөнхий тэгшитгэл** гэж тус тус нэрлэнэ. (10.2) тэгшитгэлд A, B, C-ийн ядаж нэг нь тэгээс ялгаатай, (10.3) тэгшитгэлд A, B, C, D, E, F тоонууд нэгэн зэрэг тэгтэй тэнцэж болохгүй. Хэрэв тийм бус бол тэдгээр нь нэгдүгээр ба хоёрдугаар зэргийн тэгшитгэл байж чадахгүйд хүрнэ.

Алгебрын тэгшитгэлээр тодорхойлогдох гадаргууг **алгебрын гадаргуу** гэж нэрлэдэг. Бид цаашид зөвхөн нэг, хоёрдугаар зэргийн тэгшитгэлээр тодорхойлогдох, гадаргуунуудыг судална.

Хавтгайн тэгшитгэл. Цэгээс хавтгай хүртэлх зай

1. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ цэгийг дайрсан $\vec{n} = \{A; B; C\}$ векторт перпендикуляр хавтгайн тэгшитгэлийг

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (10.4)$$

томъёогоор бичнэ.

2. 1-зэргийн гурван үл мэдэгдэхтэй

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

тэгшитгэлийг хавтгайн **ерөнхий тэгшитгэл** гэнэ.
Үүнд $\vec{n} = \{A; B; C\}$ вектор нь хавтгайд перпендикуляр ба түүнийг **нормаль вектор** гэнэ.

Хавтгайн ерөнхий тэгшитгэлийн тухайн тохиолдлуудыг авч үзье.

1. $D = 0$ байвал $Ax + By + Cz = 0$ тэгшитгэл нь координатын эхийг дайрсан хавтгайг
2. $C = 0$ бол $Ax + By + D = 0$ тэгшитгэл нь Oz тэнхлэгтэй,
3. $A = 0$ бол $By + Cz + D = 0$ тэгшитгэл нь Ox тэнхлэгтэй,
4. $B = 0$ бол $Ax + Cz + D = 0$ тэгшитгэл нь Oy тэнхлэгтэй параллель хавтгайг тус тус тодорхойлно.
5. $C = 0, D = 0$ бол $Ax + By = 0$ тэгшитгэл нь Oz тэнхлэгийг
6. $B = 0, D = 0$ бол $Ax + Cz = 0$ тэгшитгэл нь Oy тэнхлэгийг
7. $A = 0, D = 0$ бол $By + Cz = 0$ тэгшитгэл нь Oz тэнхлэгийг дайрсан хавтгайг тус тус тодорхойлно.

Координатын хавтгайнуудтай параллель хавтгайнууд:

1. $Ax + D = 0$ нь Oyz-тай
2. $By + D = 0$ нь Oxz-тай
3. $Cz + D = 0$ нь Oxy хавтгайтай параллель хавтгайг тодорхойлно.

Координатын хавтгайнууд нь харгалзан
$x = 0, y = 0, z = 0$ тэгшитгэлтэй байна.
Координатын тэнхлэгүүдийг харгалзан a, b, c-хэрчмээр огтолсон хавтгайн тэгшитгэл нь:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{10.5}$$

байна.
Үүнийг хавтгайн **хэрчмээр илэрхийлэгдэх тэгшитгэл** гэнэ.

Координатын эхээс хавтгайд буулгасан перпендикулярын уртыг p-ээр тэмдэглэе. Хавтгайн нормаль нэгж векторыг $\overrightarrow{n_0}$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $\overrightarrow{n_0} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ болно. Үүнд: α, β, γ нь $\overrightarrow{n_0}$-ын координатын тэнхлэгүүдтэй үүсгэсэн өнцгүүд. Энэ үед хавтгайн тэгшитгэлийг

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{10.6}$$

хэлбэртэй бичиж болох ба түүнийг **хавтгайн эгэл тэгшитгэл** гэдэг.
Хавтгайн ерөнхий тэгшитгэлийг эгэл дүрсэд шилжүүлэхийн тулд тэгшитгэлийн хоёр талыг нормаль векторын модулийг D-ийн эсрэг тэмдэгтэй авч хуваана. Өөрөөр хэлбэл хавтгайн эгэл тэгшитгэл нь

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \qquad 10.6'$$

болно. Үүнд язгуурын өмнөх тэмдгийг D -ийн эсрэгээр сонгон авна.

1. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ цэгээс $Ax + By + Cy + D = 0$ хавтгай хүртлэх **хазайлт** нь:

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (10.7)$$

томъёогоор тодорхойлогдох ба энэ хазайлт хэрэв M_1 цэг координатын эхтэй хамт хавтгайн нэг талд оршвол сөрөг, хоёр талд нь оршвол эерэг тэмдэгтэй тоо байна.
Хазайлтын модул нь **цэгээс хавтгай хүрэх зай** болох ба энэ нь

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (10.8)$$

1. Хоёр хавтгай огтолцсон, параллель, давхацсан байж болно.
   I. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
   II. $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
   гэсэн тэгшитгэлтэй огтолцсон хоёр хавтгайн **хоорондох өнцөг** нь:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

   томъёогоор тодорхойлогдоно.
   Зөвхөн $\cos\varphi = 0$ нөхцөлд хоёр хавтгай **перпендикуляр** байх тул

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

ШУТИС
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

нь хавтгайнууд перпендикуляр байх нөхцөл болно. Нормаль векторууд нь коллинар байх тохиолдолд л хавтгайнууд параллель байх тул

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

нь хавтгайнууд **параллель** байх нөхцөл юм. Хавтгайнууд давхцсан байх нөхцөл нь

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

байна.
Нэг шулууныг дайрсан хавтгайнуудыг **багц хавтгай** гэнэ. Огтолцлын шулууныг нь багцын тэнхлэг гэдэг. Багц нь хоёр хавтгайгаараа бүрэн тодорхойлогдоно.

Багц хавтгайн дурын хавтгайг өгөгдсөн

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

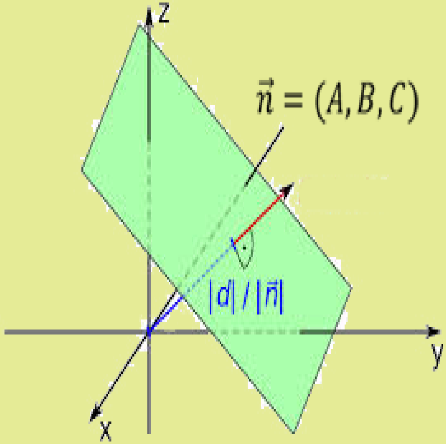
хавтгайнуудын тэгшитгэлийн тусламжтайгаар

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{10.9}$$

гэж илэрхийлнэ. Энд λ дурын бодит тоо.

11. Лекц XI

ОГТОРГУЙ ДАХЬ ШУЛУУНЫ ТЭГШИТГЭЛҮҮД. ТЭДГЭЭРИЙН ХАРИЛЦАН БАЙРШИЛ. ХАВТГАЙ ШУЛУУНЫ ХАРИЛЦАН БАЙРШИЛ.



Шулуун шугам, шулуун ба хавтгайн харилцан байршил

1. $M_0(a, b, c)$ цэгийг дайрсан, $\vec{S} = \{m; n; p\}$ чиглүүлэгч вектортой параллель шулууны тэгшитгэл нь:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \tag{11.1}$$

хэлбэртэй байна. Үүнийг **шулууны хялбар тэгшитгэл** гэнэ.

2. (11.1)-тэгшитгэл дэх тэнцүү ноогдвор бүрийг t-тэй тэнцүүлж x, y, z-ийг олбол

$$x = a + mt, \; y = b + nt, \; z = c + pt \tag{11.2}$$

болно. Үүнийг **шулууны параметрт тэгшитгэл**, t-г **параметр** гэдэг.

ШУТИС
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

$M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ гэсэн өгөгдсөн **хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэл:**

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{11.3}$$

хэлбэртэй байна.
Хоёр хавтгайн огтлолцол нь шулуун байх тул

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{8.4}$$

системийг **шулууны ерөнхий тэгшитгэл** гэнэ.

Шулууны ерөнхий тэгшитгэл (11.4) өгөгдсөн байвал хялбар тэгшитгэлийг нь олж болно.

Шулууны чиглүүлэгч вектор нь $\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$, $\overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ векторуудад перпендикуляр байх учир эдгээрийн вектор үржвэрээр тодорхойлогдоно.

(11.4) системийн аль нэг шийд буюу шулууны $M_0(x_0, y_0, z_0)$ цэгийг олбол шулууны хялбар тэгшитгэл

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

болно. Үүнд: $\vec{S} = \{m, n, p\}$, чиглүүлэгч вектор

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \ n = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \ p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Огторгуйн хоёр шулуун огтлолцсон, параллель, солбисон байж болно.

Хоёр огтолцсон шулууны хоорондох өнцөг нь

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \qquad (11.5)$$

томъёогоор илэрхийлэгдэнэ. Үүнд $\{m_1; n_1; p_1\}$, $\{m_2; n_2; p_2\}$ нь шулуунуудын чиглүүлэгч векторууд юм.

Хоёр шулууны параллель байх нөхцөл нь

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

байна.

Перпендикуляр байх нөхцөл нь

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

байна. $\dfrac{x-a}{m} = \dfrac{y-b}{n} = \dfrac{z-c}{p}$ **шулуун,** $Ax+By+Cz+D=0$ **хавтгай хоёрын хоорондох өнцөг** φ

$$\sin\varphi = \frac{|Ax+By+Cz|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{11.6}$$

томъёогоор илэрхийлэгдэнэ.

Шулуун, хавтгайтай

$$Am + Bn + Cp = 0$$

нөхцөлд **параллель**

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

нөхцөлд **перпендикуляр** байна.

Хавтгай ба шулууны бодлогууд

1. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_1(x_3, y_3, z_3)$ цэгийг дайрсан хавтгайн тэгшитгэл зохио. Дурын цэгийг нь $M(x, y, z)$ гэвэл $\overrightarrow{OM_1} = \{x_1, y_1, z_1\} = \vec{r_1}$, $\vec{r_2} = \overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\overrightarrow{OM_3} = \{x_3, y_3, z_3\} = \vec{r_3}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \{x, y, z\}$ гэвэл $\vec{r} - \vec{r_1}$, $\vec{r_2} - \vec{r_1}$, $\vec{r_3} - \vec{r_1}$ векторууд компланар учир

$$(\vec{r} - \vec{r_1}) \cdot (\vec{r_2} - \vec{r_1}) \cdot (\vec{r_3} - \vec{r_1}) = 0$$

координатаар бичвэл

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

2. $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ шулуун, түүний гадна орших $M_1(x_1, y_1, z_1)$ цэгийг дайрсан хавтгайн тэгшитгэл зохио.

$\{l, m, n\}$, $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}$, $\overrightarrow{M_0M} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$ векторууд компланар учир

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

Нүүр хуудас

3. Параллель хоёр шулууныг дайрсан хавтгайн тэгшитгэл зохио.

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n},\ \frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ цэгүүд хавтгай дээр оршино.
$M(x, y, z)$ нь хавтгайн дурын цэг бол $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\vec{N} = \{l, m, n\}$ векторууд компланар тул

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

ШУТИС
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

4. Огтолцсон $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ шулуунуудыг дайрсан хавтгайн тэгшитгэл зохио.
Дурын цэгийг нь $M(x,y,z)$ гэвэл

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & n_1 & m_1 \\ l_2 & n_2 & m_2 \end{vmatrix}=0$$

$Ax+By+lz+D=0$ хавтгай $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ шулууны хоорондох өнцгийг ол.

Шулууны, хавтгайд налсан өнцгийг $\varphi(0\leq\varphi<\frac{\pi}{2})$ гэвэл хавтгайн нормаль $\vec{n}$-ийн шулууны чиглүүлэгчтэй үүсгэсэн өнцөг $\frac{\pi}{2}-\varphi$ байна.

Иймучраас

$$\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

болно.

5. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ бол $\vec{N} = \{l, m, n\}$, $\vec{n} = \{A, B, C\}$ векторууд коллинеар учир $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$, $\varphi = 0$ бол $\vec{N} \perp \vec{n}$ учир $Al + Bm + Cn = 0$ нөхцлүүд гарна.

6. $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ шулуун

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

хавтгайн огтолцлын цэгийг ол.

Шулууны тэгшитгэлийг параметр хэлбэртэй бичиж хавтгайн тэгшитгэлд орлуулж

$$A\ell + Bm + Cn \neq 0$$

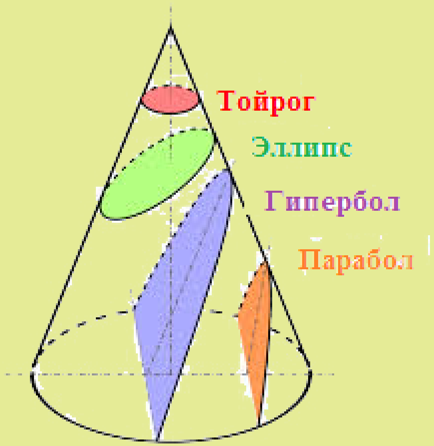
бол

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A\ell + Bm + Cn}$$

гэж олоод шулууны параметр тэгшитгэлд орлуулж олно.

12. Лекц XII

ХОЁРДУГААР ЭРЭМБИЙН МУРУЙНУУД



ШУТИС
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

Эллипс

Тодорхойлолт 12.1 Фокус гэж нэрлэгдэх бэхлэгдсэн хоёр цэг хүртэлх зайнуудын нийлбэр тогтмол тоо байх хавтгайн бүх цэгийн **олонлогийг эллипс** гэнэ.

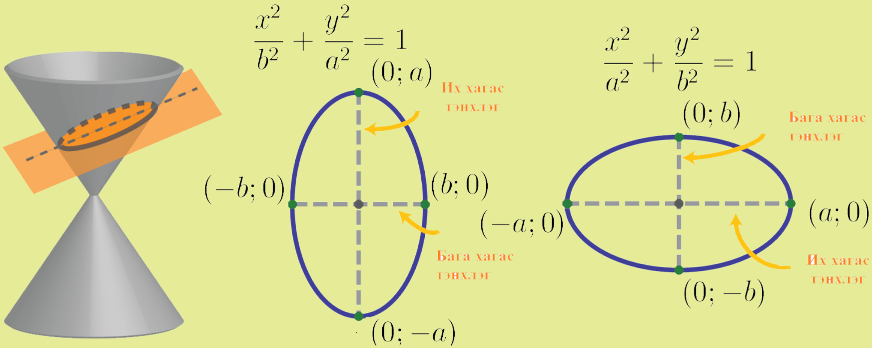
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{12.1}$$

(12.1) тэгшитгэлийг эллипсийн хялбар тэгшитгэл буюу **канонок тэгшитгэл** гэнэ. Үүнд a ба b нь өгөгдсөн эерэг тоонууд бөгөөд тэдгээрийг эллипсийн **хагас тэнхлэгүүд** гэж нэрлэх ба $a > b$ гэж үзээд фокусуудын хоорондох зайн хагасыг c гэвэл

$$c^2 = a^2 - b^2$$

байна. Энэ үед (12.1) эллипсийн фокусууд нь $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ болно.
(12.1) тэгшитгэлтэй эллипсийн абсцисс болон ординат тэнхлэгүүдтэй огтлолцох цэгүүд нь $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ бөгөөд энэ 4 цэгийг эллипсийн оройн цэгүүд гэнэ.

Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас



Тодорхойлолт 12.2 Эллипсийн фокусуудын хоорондох зайг их тэнхлэгт харьцуулсан харьцааг түүний **эксцентриситет** гэнэ. Эксцентриситетийг ε үсгээр тэмдэглэх ба тодорхойлолтоор $\varepsilon=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{c}{a}$, $a>c$ тул ямар ч эллипсийн эксценриситет $\varepsilon<1$ байна. Хэрэв $M(x;y)$ цэг эллипс дээр орших дурын цэг мөн r_1, r_2 нь түүнээс F_1, F_2 фокусууд хүрэх зайнууд бол

$$\begin{cases} r_1=a+\varepsilon\cdot x \\ r_2=a-\varepsilon\cdot x \end{cases} \tag{12.2}$$

эдгээрийг цэгийн **фокусын радиус** гэнэ.

Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ хоёр шулууны (9.1) **эллипсийн директрис** гэнэ.

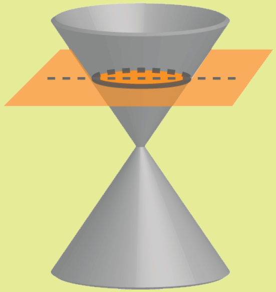
Тойрог

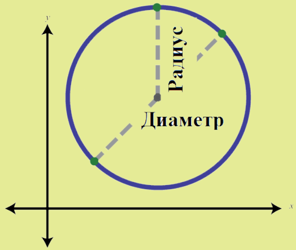
Хэрэв эллипсийн хувьд $a = b$ бол эллипс нь тойрог болно. Тойргийн хялбар тэгшитгэл нь $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ хэлбэртэй байна.

Энд $C(\alpha;\beta)$ цэг дээр эхтэй R радиустай тойрог байна. $\alpha = 0$, $\beta = 0$ үед

$$x^2 + y^2 = R^2$$

тэгшитгэл гарах ба энэ нь координатын эх дээр төвтэй тойргийн тэгшитгэл юм.





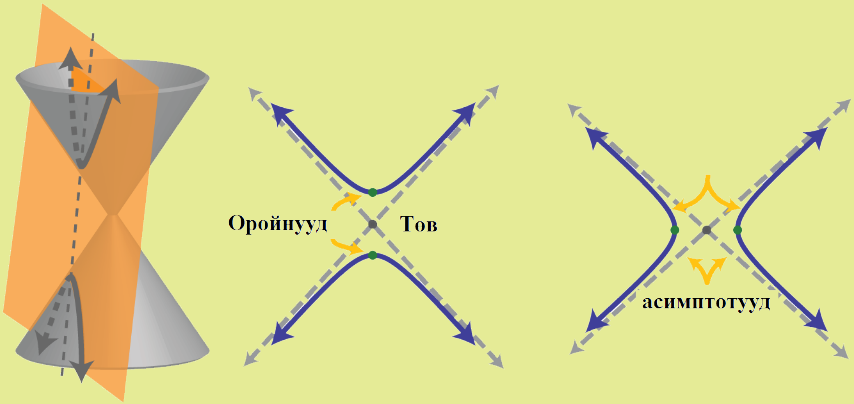
Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

Гипербол

Тодорхойлолт 12.3 Фокус гэж нэрлэгдэх бэхлэгдсэн хоёр цэг хүртэлх зайнуудын ялгавар тогтмол тоо байх хавтгайн бүх цэгийн олонлогийг **гипербол** гэнэ.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{12.3}$$

(12.3) тэгшитгэлийг эллипсийн **хялбар** тэгшитгэл буюу **канонок тэгшитгэл** гэнэ.



Үүнд a, b зэрэг тогтмол тоонууд бөгөөд -г **бодит хагас тэнхлэг**, b-г **хуурмаг хагас тэнхлэг** гэнэ. (12.3) гиперболийн фокусуудын хоорондох зайн хагас нь c бол

$$c^2 = a^2 + b^2$$

байна. (12.3) гиперболийн фокусууд нь $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ байна.

$y = \pm\frac{b}{a}x$ шулуунууд нь гиперболийн **асимптотууд** болно.

Тодорхойлолт 12.4 Гиперболийн фокусуудын хоорондох зайг бодит тэнхлэгт харьцуулсан харьцааг түүний **эксцентриситет** гэнэ. Эксцентриситетийг ε үсгээр тэмдэглэх ба тодорхойлолтоор $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$, $a < c$ тул ямар ч гиперболын эксценриситет $\varepsilon > 1$ байна.

Хэрэв $M(x;y)$ цэг гипербол дээр орших дурын цэг мөн r_1, r_2 нь түүнээс F_1, F_2 фокусууд хүрэх зайнууд бол

$$x > 0 \quad \text{үед} \quad \begin{cases} r_1 = a + \varepsilon \cdot x \\ r_2 = - + \varepsilon \cdot x \end{cases}$$

$$x < 0 \quad \text{үед} \quad \begin{cases} r_1 = -a - \varepsilon \cdot x \\ r_2 = \quad - \varepsilon \cdot x \end{cases}$$

байна.

r_1 ба r_2 -ийг цэгийн **фокусын радиус** гэнэ.

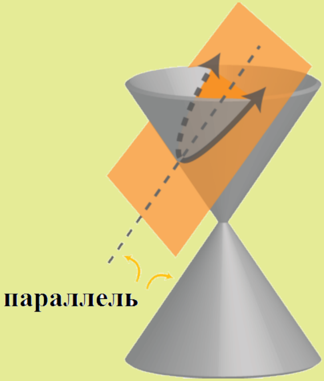
$x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ хоёр шулууныг (12.3) **гиперболийн директрис** гэнэ. Директрисийн хувьд дараах теорем хүчинтэй.

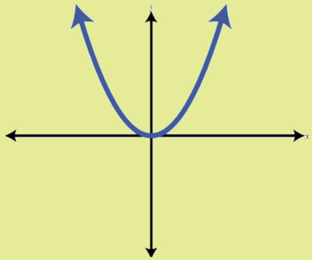
Теорем 12.2 Хэрэв r нь гиперболийн дурын цэгээс аль нэг фокус хүрэх зай, d нь мөн цэгээс энэ фокуст харгалзах директрис хүрэх зай бол $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$ байна.

Лекц I
Лекц II
Лекц III
Лекц IV
Лекц V
Лекц VI
Лекц VII
Лекц VIII
Лекц IX
Лекц X
Лекц XI
Лекц XII
Лекц XIII
Лекц XIV
Лекц XV
Лекц XVI
Нүүр хуудас

Парабол

Тодорхойлолт 12.5 Фокус гэж нэрлэгдэх бэхлэгдсэн цэг болон директрис хэмээх өгсөн шулуунаас ижил зайтай орших цэгүүдийн олонлогийг **парабол** гэнэ.





Хэрэв $x = -\dfrac{p}{2}$ шулуун параболын директрис, $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$ параболын фокус бол параболын тэгшитгэл нь

$$y^2 = 2px \qquad (12.4)$$

хэлбэртэй байна. Үүнийг параболын **хялбар тэгшитгэл** гэнэ.

Тодорхойлолт 12.6 Параболын дурын цэгээс фокус хүрэх зайг директрис хүрэх зайд харьцуулсан харьцааг **параболын эксцентриситет** гэх ба ямагт $\varepsilon = 1$ байна.
Хэрэв M цэг парабол дээр орших дурын цэг, r нь түүнээс фокус хүрэх зай бол

$$r = x + \frac{p}{2} \tag{12.5}$$

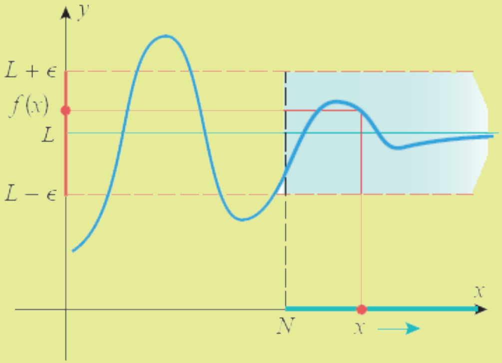
байна. Үүнийг M цэгийн **фокусын радиус** гэнэ.

13. Лекц XIII

kl

14. Лекц XIV

ФУНКЦИЙН ХЯЗГААР. ГАЙХАМШИГТ ХЯЗГААРУУД. ФУНКЦИЙН ТАСРАЛТГҮЙ ЧАНАР. БАГАСАЖ БАРАГДАШГҮЙ ХЭМЖИГДЭХҮҮН



$|f(x) - L| < \epsilon$ if $x > N$

Тодорхойлолт 14.1 Хэрвээ хичнээн ч бага байж болох $\xi > 0$ тоо авахад $n > N(\xi)$ гэсэн бүх дугааруудад $|x_n - a| < \xi$ тэнцэтгэл биш үргэлж биелэгдэж байх $N(\xi)$ дугаар олдож байвал a **тоог** $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ **дарааллын хязгаар** гэж нэрлээд

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

гэж тэмдэглэнэ.

Дурын бага $\xi > 0$ тоо авахад $|x - a| < \delta$ тэнцэтгэл бишийг хангах бүх x-ийн хувьд $|f(x) - A| < \xi$ биелэгдэж байхаар $\delta(\xi)$ тоо олдох бол A **тоог** $f(x)$ **функцийн** $x \to a$ **үеийн хязгаар** гэж нэрлээд

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

гэж нэрлэдэг. Хэрэв $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ бол $\alpha(x)$-г

функцийг **багасгаж барагдашгүй бага хэмжигдэхүүн** гэдэг.

Багасгаж барагдашгүй бага $\alpha(x)$, $\beta(x)$ гэсэн хоёр хэмжигдэхүүний хувьд $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ байвал эдгээрийг **эквивалент (эн чацуу)** бага байж болох хэмжигдэхүүнүүд гээд $\alpha\sim\beta$ гэж тэмдэглэдэг.

Бодлого бодохдоо $x\to 0$ үед $\sin x\sim x$, $tgx\sim x$, $arcsinx\sim x$, $arctgx\sim x$, $ln(1+x)\sim x$ болохыг мэддэг байх ашигтай.

Хэрэв $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ хязгаарууд оршин байвал

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, $(\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ үед $)$

чанарууд хүчинтэй байдаг.

Мөн 1-р гайхамшигт хязгаар

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

2-р гайхамшигт хязгаар

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e=2,71828\cdots$$

байна.

Хязгаарын бодлого бодоход дараахь тэнцлүүдийг хэрэглэх нь ашигтай.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$$

Функцийн тасралтгүй чанар

1. Өрөөсгөл хязгаарууд: $f(x)$ функц $x=a$ цэгийн орчинд тодорхойлогдсон байг.
Хэрэв $x>a$ $(x<a)$ байгаад $x\to a$ үед $f(x)$ функцийн хязгаар оршин байвал түүнийг $f(x)$ функцийн $x\to a$ үеийн **баруун (зүүн) өрөөсгөл хязгаар** гэх ба $f(a+0)$, $(f(a-0))$ гэж тэмдэглэнэ.

Нүүр хуудас

Хэрэв $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ байвал $f(a+0) = f(a-0) = A$ байна.

Функцийн тасралтгүй чанар. Хэрэв $x = a$ цэг дээр $f(x)$ функц тодорхойлогдсон.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \tag{14.1}$$

байвал $y = f(x)$ функцийг $x = a$ **цэг дээр тасралтгүй** гэнэ.

$\triangle x = x - a, \quad \triangle y = f(a - \triangle x) - f(a)$ гэж тэмдэглэл хийвэл

$$\lim_{\triangle x\to 0} \triangle y = 0 \tag{14.2}$$

хэлбэрээр бичиж болно.

Иймээс $y = f(x)$ функц $x = a$ цэг дээр тасралтгүй гэдгийг дараахь маягаар тодорхойлж болно. Хэрвээ

1) $x = a$ цэг дээр $f(x)$ функц тодорхойлогдсон

2) $\lim\limits_{\triangle x\to 0} [f(a + \triangle x) - f(a)] = 0$ байвал $f(x)$ функцийг $x = a$ цэг дээр тасралтгүй байна гэдэг.

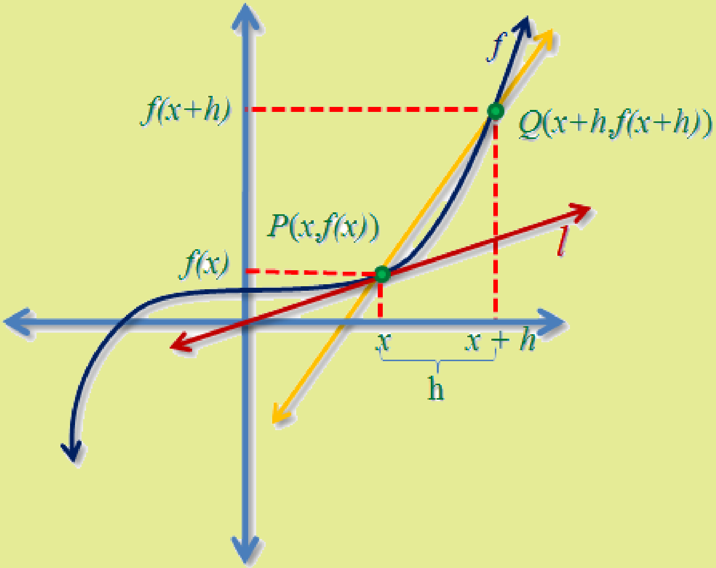
$(a,\ b)$ завсрын бүх цэг дээр $f(x)$ функц тасралтгүй бол түүнийг $(a,\ b)$ **завсарт тасралтгүй** байна гэнэ.

Функцийн тасралтын цэг.
Хэрэв $f(x)$ функц $x = a$ цэг дээр тасралтгүйн нөхцлийг хангахгүй байвал $x = a$ цэгийг $f(x)$ функцийн **тасралтын цэг** гэнэ. Энэ нь дараахь нөхцлийн дор хаяад нэг нь биелэхгүй байна гэсэн үг.
1) $f(x)$ функц $x = a$ цэг дээр тодорхойлогдсон байх
2) $f(a+0)$, $f(a-0)$ оршин байх
3) $f(a+0) = f(a-0)$ байх
4) $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$ байх

Тасралтгүй функцийн чанарууд. Төгсгөлөг тооны тасралтгүй функцийн алгебрийн нийлбэр, үржвэр тасралтгүй функц байна. Тасралтгүй функцуудийн ноогдвор нь хуваарь тэгээс ялгаатай цэг дээр тасралтгүй байна. Хэрвээ $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ функцууд тасралтгүй бол нийлмэл функц $y = f[\varphi(x)]$-нь x аргументаараа тасралтгүй байна.

15. Лекц XV

ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ, ГЕОМЕТР БА МЕХАНИК УТГА, ДИФФЕРЕНЦИАЛЧЛАХ ДҮРЭМ, ДЭЭД ЭРЭМБИЙН УЛАМЖЛАЛ БА ДИФФЕРЕНЦИАЛ


f
f(x+h)
Q(x+h,f(x+h))
P(x,f(x))
f(x)
l
x
x + h
h

1. Нийлбэрийн уламжлал.
Төгсгөлөг тооны дифференциалчлагдах функцын нийлбэрийн уламжлал нэмэгдэхүүн тус бүрийн уламжлалуудын нийлбэртэй тэнцүү байна.

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n$$

2. Үржвэрийн уламжлал.
$u(x)$, $v(x)$ нь дифференциалчлагдах функцууд байг. Тэгвэл

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Тогтмол үржигдэхүүнийг уламжлалын тэмдгийн өмнө гаргаж болно.

$$(c \cdot v)' = c \cdot v', \quad c - const$$

3. Ноогдворын уламжлал.

$u(x)$, $v(x)$ нь дифференциалчлагдах функцууд байг. $v(x) \neq 0$ үед

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad c - const$$

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$$

4. Давхар функцын уламжлал

X муж дээр тодорхойлогдсон $y = f[\varphi(x)]$ функц байг. $z = \varphi(x)$, $y = f(z)$ функцууд дифференциалчлагдаж байвал

$$f'[\varphi(x)] = f'(z) \cdot z'$$

буюу

$$f'[\varphi(x)] = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

5. Урвуу функцын уламжлал
Хэрэв $y = f(x)$ нь дифференциалчлагдах бөгөөд $f'(x) \neq 0$ байхаас гадна $x = g(y)$ гэсэн урвуу функц нь оршин байвал $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

6. Параметрт хэлбэрээр өгөгдсөн функцын уламжлал

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} ;\ t_0 \leq t \leq T$$

тэгшитгэлээр өгөгдсөн гэж үзье.
$\varphi(t)$, $\psi(t)$ функцүүд дифференциалчлагдах ба $\psi'(t) \neq 0$ байг $y'_x = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$.

Функцын уламжлалын геометр ба механик утга

Муруй $y = f(x)$ тэгшитгэлээр өгөгдсөн ба түүний x_0 абцисстай цэгт татсан шүргэгчийн $0x$ тэнхлэгтэй үүсгэх өнцөг нь α бол $f'(x_0) = tg\alpha$ байдаг. Харин $y = f(x)$ муруйн $M_0(x_0, y_0)$ цэгт татсан шүргэгчийн тэгшитгэл нь $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Шүргэлтийн цэгийг дайрсан бөгөөд түүнд перпендикуляр шулууныг уул муруйн **нормаль** гэж нэрлэдэг. Нормалийн тэгшитгэл нь

$$y - y_0 = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

хэлбэртэй.

$y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ муруйнуудын огтлолцсон цэг $M_0(x_0, y_0)$-д татсан шүргэгчүүдийн хоорондох өнцгийг эдгээр муруйн хоорондох өнцөг гэж нэрлэх ба түүнийг

$$tg\varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0)f'_2(x_0)}$$

томъёогоор тодорхойлдог. Хэрэв материаллаг цэг $s = s(t)$ гэсэн хуулиар шулуун замын хөдөлгөөн дэх хурд нь замаас хугацаагаар авсан уламжлал байна.

$$v = s'(t_0)$$

7. Далд хэлбэрээр өгөгдсөн функцын уламжлал

Аргумент x, түүнээс хамаарсан y функц нь

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

тэгшитгэлээр холбогдсон байвал y-ыг далд дүрсээр өгөгдсөн функц гэнэ. Далд дүрсээр өгөгдсөн y функцээс x-ээр авсан уламжлалыг олохдоо (1) тэгшитгэлийн хоёр гар талыг, y нь x-ээс хамаарсан функц болохыг анхаарч x-ээр дифференциалчилж гарах тэгшитгэлийн y'_x-ын хувьд бодно.

Уламжлалын таблиц

1. $y=x^{\alpha}; \quad y'=\alpha x^{\alpha-1}$
   $y=x; \quad y'=1$
   $y=\sqrt{x}; \quad y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
   $y=\dfrac{1}{x}; \quad y'=-\dfrac{1}{x^2}$
   $y=c \quad y'=0$

Уламжлалын таблиц

2.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
3.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
4.	$y = \mathrm{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
5.	$y = \mathrm{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
6.	$y = \log_a^x$	$y' = \dfrac{1}{x}\log_a^e = \dfrac{1}{x \ln a}$
	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
7.	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
	$y = e^x$	$y' = e^x$
8.	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9.	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Уламжлалын таблиц

10. $y = \mathrm{arctg} x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

11. $y = \mathrm{arcctg} x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

12. $y = \mathrm{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad y' = \mathrm{ch} x$

13. $y = \mathrm{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad y' = \mathrm{sh} x$

14. $y = \mathrm{th} x = \dfrac{\mathrm{sh} x}{\mathrm{ch} x}$ $\qquad y' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$

15. $y = \mathrm{cth} x = \dfrac{\mathrm{ch} x}{\mathrm{sh} x}$ $\qquad y' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Функцийн дифференциал нь түүний уламжлалыг аргументын дифференциалаар үржүүлсэнтэй тэнцүү.

$$dy = y'dx$$

Тодорхойлолт 15.1 $y = f(x)$ функцийн уламжлалаас дахин уламжлал авсныг **2-р эрэмбийн уламжлал** гээд

$$y'' = (y')' = (f'(x))'$$

гэж тэмдэглэдэг. Үүнтэй нэгэн адилаар 3, 4 болон дээд эрэмбийн уламжлалыг тодорхойлох бөгөөд $y^{(n)} = (y^{n-1})'$ гэж тэмдэглэдэг.

Тодорхойлолт 15.2 Нэгдүгээр эрэмбийн дифференциалаас дахин дифференциал авсныг **2-р эрэмбийн дифференциал** гэдэг.

$$d^2y = d(dy)$$

Мөн түүнчлэн $d^3y = d(d^2y), \cdots, d^ny = d(d^{n-1}y)$ гэж тэмдэглэнэ. Дээд эрэмбийн дифференциалыг $d^2y = y''(dx)^2, \quad d^3y = y'''(dx)^3, \cdots, d^ny = y^{(n)}(dx)^n$ гэж боддог.

Теорем 15.1 Роллийн теорем. Хэрэв $y = f(x)$ функц $[a,\ b]$ хэрчим дээр тасралтгүй, $(a,\ b)$ завсарт дифференциалдахаас гадна $f(a) = f(b)$ байвал $f'(c) = 0$ байх c цэг $(a,\ b)$ завсраас ядаж нэг олдоно.

Теорем 15.2 Лагранжийн теорем. $y = f(x)$ функц $[a,\ b]$ хэрчим дээр тасралтгүй бөгөөд $(a,\ b)$ дээр дифференциалчлагдах бол $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ байх c цэг энэ интервалаас ядаж нэг олдоно.

Тейлорын томъёо. $y = f(x)$, функц $x = a$ цэгийг агуулсан ямар нэг интервалд $n + 1$ удаа дифференциалагдаж байвал

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) +$$

$$\frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$

томъёо хүчинтэй байна.

$x = 0$ цэгийн орчинд задалвал

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n + R_n(x)$$

болох ба үүнийг **Маклорены томъёо** гэнэ.

Тодорхой бишийг тайлах Лопиталийн дүрэм

1. Хэрэв $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to a}\psi(x) = 0$ ба $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ оршин байвал
$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} \tag{1}$$
байна.

2. Хэрэв $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$ ба $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ оршин байвал
$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} \tag{2}$$
байна. (1) ба (2)-ыг **Лопиталийн дүрэм** гэнэ.

16. Лекц XVI

ФУНКЦИЙН БҮРЭН ШИНЖИЛГЭЭ

Функцийн өсөх, буурах завсар. Экстремум утга

Тодорхойлолт 16.1 Хэрвээ дурын $x_1, x_2 \in (a, b)$-ийн хувьд $x_1 < x_2$ тэнцэтгэл биш биелнэ гэдгээс

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

тэнцэтгэл биш биелж байвал $y = f(x)$ функцийг (a, b) завсарт **өсөх (буурах)** функц гэнэ.

Хэрэв f(x) функц нь (a, b) завсарт дифференциалчлагддаг ба $x \in (a, b)$ бүрийн хувьд $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ байвал f(x) функц нь (a,b) завсарт өснө (буурна). Хялбар тохиолдолд $y = f(x)$ функцийн тодорхойлогдох мужийг төгслөг тооны монотон завсруудад хувааж болно.

Монотон завсар бүр нь $f'(x) = 0$ эсвэл $f'(x)$ үл орших цэгүүдээр заагладана.

Тодорхойлолт 16.2 Хэрвээ x_0 цэгийн ямар нэг δ орчны x_0 цэгээс ялгаатай x бүрийн хувьд $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$ тэнцэтгэл биш биелж байвал x_0 цэгийг $y = f(x)$ функцийн локаль минимумын (максимумын) цэг, $f(x_0)$ утгыг локаль минимум (максимум) утга гэж нэрлэнэ.
Функцийн минимум ба максимумын утгуудыг экстремум утга гэнэ.

Экстремум орших зайлшгүй нөхцөл
Хэрвээ x_0 цэг нь f(x) функцийн эктремумын цэг бол $f'(x_0) = 0$ эсвэл $f'(x_0)$ үл оршино. $f'(x_0) = 0$ эсвэл $f'(x_0)$ үл орших x_0 цэгийг функцийн **сэжигтэй цэг** гэж нэрлэнэ. Сэжигтэй цэг бүр дээрээ функц экстремумтэй байх албагүй.

Экстремум байх хүрэлцээтэй нөхцөл:
1. $f(x)$ функц нь x_0 сэжигтэй цэгийн ямар нэг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ орчины x_0-оос бусад цэгүүд дээр дифференциалчлагддаг байг. Хэрэв $(x_0 - \delta, x_0)$ ба $(x_0, x_0 + \delta)$ завсруудад $f'(x)$ нь тэмдгээ эсрэгээр өөрчилж байвал x_0 нь экстремумын цэг байна.

Өөрөөр хэлбэл $(x_0 - \delta, x_0)$ завсрын x бүрийн хувьд $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ ба $(x_0, x_0 + \delta)$-ийн x бүрийн хувьд $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ бол $x = x_0$ нь максимумын (минимумын) цэг байна.
Хэрвээ $f'(x)$ нь $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ бүр нь $x \neq x_0$ үед тэмдгээ хадгалж байвал x_0-экстремумын цэг биш байна.

2. f(x) функц нь x_0 сэжигтэй цэг болон түүний ямар нэг орчинд тэгээс ялгаатай II эрэмбийн уламжлалтай бөгөөд $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$ бол x_0 нь минимумын (максимумын) цэг болно.

Тодорхойлолт 16.1 (a, b) завсар дах функцийн график нь уг завсар дах дурын цэгт татсан шүргэгчийнхээ дээр (доор) байрлаж байвал өгсөн функцийг (a,b) завсарт **хотгор(гүдгэр)** гэнэ.

Хэрвээ функц (a,b) завсарт хоёр удаа дифференциалчлагддаг ба $f''(x) > 0(f''(x) < 0)$ бол энэ завсарт функцийн график хотгор (гүдгэр) байна.
Хялбар тохиолдолд $y = f(x)$ функцийн тодорхойлогдох муж функцийн график гүдгэр эсвэл хотгор байх төгслөг тооны завсруудад хуваагдана. Эдгээр завсруудад хуваах цэгүүд нь $f''(x) = 0$ эсвэл $f''(x)$ үл орших цэгүүд байна.

Тодорхойлолт 16.2 $f(x)$ функцийн график $f(x_0; f(x_0))$ цэгийг дайран гарахдаа хотгороос гүдгэр рүү эсвэл гүдгэрээс хотгор руу шилжиж байвал $f(x_0; f(x_0))$ цэгийг **нугаралтын цэг** гэнэ.

Нугаралтын цэг байх хүрэлцээтэй нөхцөл:
f(x) функц нь x_0 цэгийн $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ гэсэн ямар нэг δ орчинд 2 удаа дифференциалчлагддаг бөгөөд $(x_0-\delta, x_0)$ ба $(x_0, x_0+\delta)$ завсруудад $f''(x)$ нь тэмдгээ эсрэгээр өөрчилж байвал $(x_0; f(x_0))$ нь нугаралтын цэг байна.

Функцийн асимптот

Тодорхойлолт 16.3 $y = f(x)$ функцийн хувьд координатын эхээс M цэг хязгааргүй холдоход функцийн графикийн $(x; f(x))$ цэгээс ямар нэг шулуун хүртэлх зай хязгааргүй багасаж байвал уг шулууныг **функцийн графикийн асимптот** гэнэ. Абсцисс тэнхлэгт перпендикуляр асимптотыг **босоо асимптот** гэнэ.

Нүүр хуудас

$x = a$ шулуун нь $y = f(x)$ функцийн босоо асимптот байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\lim\limits_{x\to\pm a} f(x)$ өрөөсгөл хязгааруудын ядаж нэг нь төгсгөлгүй байна.
Тасралтгүй функц нь босоо асимптот байхгүй.
Хэрвээ цэгийн x координат нь $\pm\infty$ уруу тэмүүлэх үед $y = kx + b$ налуу асимптот олдох гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$$

хязгаарууд оршин байх явдал юм.

Функцийн график байгуулах схем

1. Тодорхойлогдох муж олно.
2. Координатын тэнхлэгүүдтэй огтолцох цэгүүд олно.
3. Асимптот олно.
4. Өсөх буурах завсар, экстремумын цэг олно.
5. Хотгор гүдгэр байх завсар, нугаралтын цэг олно.
6. Функцийн график байгуулна.

АМЖИЛТ ХҮСЬЕ